第 5 讲　随机变量函数的概率分布

知识梳理

一　求解随机变量函数概率分布的基本思路

1.→ **离散**

· 包括一维连续 → 多维离散，多维离散 → 多维离散，多维连续 → 一维离散等

① **列出因变量的所有可能取值(组合)，并与自变量的取值一一对应**

· 如果自变量是连续变量，则对应的是取值范围

② **求因变量各个取值(组合)的概率：等于对应的自变量取值(组合)的概率**

· 如果一个因变量的取值对应多个自变量的取值，则其概率为所有对应的自变量取值概率之和

· 如果一个因变量的取值没有对应的自变量取值，则该取值对应的概率为 0

③ **列表，得到分布律**

2.→ **连续**

· 包括一维连续 → 一维连续，多维连续 → 一维连续，多维混合 → 一维连续等

① **写出因变量的分布函数，用取值范围的概率表示**

② **将因变量用自变量表示，转化为自变量的取值范围**

· 常用的等价事件转化

最大值分布函数

$$\boxed{P(\max(X_1,\cdots,X_n)\leq y)=P(X_1\leq y,\cdots,X_n\leq y)}$$

最小值分布函数

$$\boxed{P(\min(X_1,\cdots,X_n)\leq y)=1-P(X_1>y,\cdots,X_n>y)}$$

③ **用自变量的分布函数或密度函数算出因变量的分布函数，若有需要则求导得到密度函数**

· 如果自变量是离散与连续组合出的混合变量，则计算分布函数时要根据离散变量的取值分类讨论

3.→ **混合**

· 包括一维连续 → 一维连续，多维连续 → 一维连续，多维混合 → 一维连续等

① **首先求出离散因变量的可能取值**

② 再写出联合分布函数，根据离散因变量的可能取值分段讨论，转化为用自变量表示的事件

③ 求出概率，得到分布函数

题型解析

九　随机变量的函数分布求解

1. 题型简述与解法

- 已知某随机变量的分布，求该随机变量的函数的分布函数、密度函数、分布律，判断独立等
- 求解方法见知识梳理
- 一句话总结就是以分布函数或分布律为核心，将因变量的事件转化回自变量的事件

2. 历年考试典型例题

① **一维连续 → 多维离散**

例 1　（16—17 春夏）设 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}0.5x, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，令 $Y_1=\begin{cases}1, X>1\\ 0, X\le 1\end{cases}$，$Y_2=\begin{cases}1, X\le 1.5\\ 0, X>1.5\end{cases}$，

求 (Y_1,Y_2) 的联合分布律；

解　Y_1 和 Y_2 的可能取值都为 0 或 1，因此总共有四种情况：

- $P(Y_1=0,Y_2=0)=P(X\le 1,X>1.5)=0$
- $P(Y_1=0,Y_2=1)=P(X\le 1,X\le 1.5)=P(X\le 1)=1/4$
- $P(Y_1=1,Y_2=0)=P(X>1,X>1.5)=P(X>1.5)=7/16$
- $P(Y_1=1,Y_2=1)=P(X>1,X\le 1.5)=P(1<X\le 1.5)=5/16$

$Y_1\backslash Y_2$	0	1
0	0	1/4
1	7/16	5/16

② **多维离散 → 多维离散**

例 2　（20—21 秋冬）设 (X,Y) 的联合分布律如下表所示，令 $Z=\min(X,Y)$，求 (X,Z) 的联合分布律。

$X\backslash Y$	0	1	2
0	a	0	b
1	b	a	b
2	0	b	$2a$

解　由于 X 和 Z 的可能取值均为 0、1 和 2，所以一共有 9 种可能的取值组合

- 可以得到每个 (X,Y) 对应的 Z 值如下表所示（红色），由此可以得到剩余 (X,Z) 的概率

$X\backslash Y$	0	1	2
0	a 0	0 0	b 0
1	b 0	a 1	b 1
2	0 0	b 1	$2a$ 2

- $P(X=0,Z=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)=a+b$

$P(X=0,Z=1)=P(X=0,Z=2)=0$

$P(X=1,Z=0)=P(X=1,Y=0)=b$

$P(X=1,Z=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=a+b$

$P(X=2,Z=0)=P(X=2,Y=0)=0$

$P(X=2,Z=1)=P(X=1,Y=1)=b$

$P(X=2,Z=2)=P(X=2,Y=2)=2a$

· 分布律如下表所示

$X\setminus Z$	0	1	2
0	$a+b$	0	0
1	b	$a+b$	0
2	0	b	$2a$

③ **一维连续 → 一维连续**

例 3 （14—15 **春夏**）某人喜欢长跑，基本上每天跑 10 公里，假设他跑 10 公里所花时间（分钟）为 $Y=40+20X$，其中 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x),0<x<1\\0, \quad 其他\end{cases}$.求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$

解 思路：$f(x)\to F(x)\to P(X\le x)\Leftrightarrow P(Y\le y)\to F_Y(y)\to f_Y(y)$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(40+20X\le y)=P(X\le\frac{y-40}{20})=F_X(\frac{y-40}{20})$$

因此 $f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X'(\frac{y-40}{20})\frac{1}{20}=f(\frac{y-40}{20})\frac{1}{20}$，即

$$f_Y(y)=\begin{cases}2(1-\frac{y-40}{20})\cdot\frac{1}{20},0<\frac{y-40}{20}<1\\0, \quad 其他\end{cases}\to\ f_Y(y)=\begin{cases}0.3-\frac{y}{200},40<y<60\\0, \quad 其他\end{cases}$$

· 教材上有一个直接得到密度函数的公式，本题可以使用，但是要注意本题能使用的原因是 Y 是严格单调的，而考试更喜欢考不严格单调的，因此不用去记那个公式

④ **多维连续 → 一维连续**

例 4 （15—16 **秋冬**）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1-x,0<x<1\\0.5, \quad 1\le x<2\\0, \quad 其他\end{cases}$，若对 X 独立观察 3 次，结果记为 X_1,X_2,X_3，设 $Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 本题类型为 **多维连续 → 一维连续**

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\max\{X_1,X_2,X_3\}\le y)=P(X_1\le y,X_2\le y,X_3\le y)$

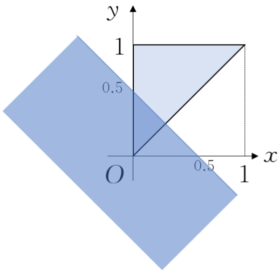
$\because$ X_1,X_2,X_3 相互独立

$\therefore$ $F_Y(y)=P(X_1\le y)P(X_2\le y)P(X_3\le y)=[P(X<y)]^3=F^3(y)$

$\therefore$ $f_Y(y)$

例 5 （18—19 **春夏**）设 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, 0<x<y<1\\0, \quad 其他\end{cases}$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解 z 的分布函数 $F(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$，如图所示



当 $z<0$ 时，$P(X+Y\le z)=0$

当 $0\le z<1$ 时，$P(X+Y\le z)=\int_0^{z/2}dx\int_x^{z-x}8xydy=\dfrac{z^4}{6}$

当 $1\le z<2$ 时，$P(X+Y\le z)=1-\int_{z/2}^{1}dy\int_{z-y}^{y}8xydx=1-\dfrac{8}{3}z+2z^2-\dfrac{1}{6}z^4$

当 $z\ge 2$ 时，$P(X+Y\le z)=1$

$$\therefore\ F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z^4}{6}, & 0\le z<1\\ 1-\dfrac{8}{3}z+2z^2-\dfrac{1}{6}z^4, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases} \to f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2z^3}{3}, & 0\le z<1\\ -\dfrac{8}{3}+4z-\dfrac{2}{3}z^3, & 1\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

⑤ **多维混合 → 一维连续**

例 6 （18—19 **秋冬**）将一枚硬币独立抛 2 次，X 表示正面朝上的次数；Y 服从 $(0,2)$ 区间上的均匀分布，设 X 与 Y 相互独立，$M=\max(X,Y)$，$Z=X+Y$，求 M,Z 的分布函数

解 $F_M(m)=P(M\le m)=P(\max(X,Y)\le m)=P(X\le m, Y\le m)$

$=P(X\le m)P(Y\le m)=F_X(m)F_Y(m)$

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$=P(X=0,Y\le z)+P(X=1,Y\le z-1)+P(X=2,Y\le z-2)$

⑥ **多维连续 → 多维混合 （包含多维连续 → 一维离散）**

例 7 （19—20 **秋冬**）设 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x)=\begin{cases}0.75, & y^2<x<1\\0, & 其他\end{cases}$，令 $Z=\begin{cases}0, & 0\le Y<\sqrt{X}<1\\1, & 其他\end{cases}$，判断 X 与 Z 是否独立？说明理由.

解 由于 X 连续，Z 离散，因此只能通过分布函数判断

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1/2, & 0\le z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$$

$$F(x,z)=P(Z\le z,X\le x)=\begin{cases}0, & z<0\\ P(Z=0,X\le x), & 0\le z<1\\ P(X\le x), & z\ge 1\end{cases}$$

$\because$ $P(Z=0,X\le x)=P(0\le Y<\sqrt{X}<1,X\le x)$，由密度函数关于 x 轴对称，可以得到

$P(0\le Y<\sqrt{X}<1,X\le x)=\dfrac{1}{2}P(X\le x)=\dfrac{1}{2}F_X(x)$

$$F(x,z)=P(Z\le z,X\le x)=\begin{cases}0(\cdot F_X(x)), & z<0\\ \dfrac{1}{2}F_X(x), & 0\le z<1\\ (1\cdot)F_X(x), & z\ge 1\end{cases}=F_Z(z)F_X(x)$$

$\therefore$ X 与 Z 相互独立